

سئله بیان آزمون ۴۰ دقیقه

۱. در گرافی کامل از مرتبه ۷، چند مسیر به طول ۴ از رأس a به رأس b وجود دارد؟
۲. در چند درخت از درخت‌های مرتبه ۶، مسیری به طول ۵ وجود دارد؟ (رسم کنید)
۳. اگر عضو ابتدای مجموعه $\{ax + by > 0 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ برابر c باشد، حاصل $(ac - bc, ab)$ کدام است؟

۴. عدد $(1F80)_{16}$ را به بیضای ۲ بیزید.
۵. ثابت کنید هر عدد اول به فرم $6k \pm 1$ می باشد.

سئله بیان آزمون ۴۰ دقیقه

۱. در گرافی کامل از مرتبه ۷، چند مسیر به طول ۴ از رأس a به رأس b وجود دارد؟
۲. در چند درخت از درخت‌های مرتبه ۶، مسیری به طول ۵ وجود دارد؟ (رسم کنید)
۳. اگر عضو ابتدای مجموعه $\{ax + by > 0 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ برابر c باشد، حاصل $(ac - bc, ab)$ کدام است؟

۴. عدد $(1F80)_{16}$ را به بیضای ۲ بیزید.
۵. ثابت کنید هر عدد اول به فرم $6k \pm 1$ می باشد.

۱. اگر $a|a$ و $16 \nmid a$ و $a = 7k + 2$ آن گاه حاصل $(a, 112)$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۴ (۴) ۵۶

۲. عدد ۲۱۰ در کدام مینا، مربع کامل است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۳. چند جفت عدد طبیعی a و b وجود دارد به طوری که $ab = 1512$ و $[a, b] = 252$ ؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴. تعداد ارقام عدد $25^{12} \times 4^{10}$ کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۱ (۳) ۲۳ (۴) ۱۳

۵. اگر $a^F || 224$ و a در این صورت $(a, 7)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۷ (۳) ۷ یا ۱ (۴) ۲

۶. اگر $S \subseteq N$ و $1 \in S$ و به ازای هر $k \in S$ بتوان نتیجه گرفت $3k \in S$ در این صورت S کدام است؟

- (۱) مجموعه مضارب طبیعی عدد ۳
(۲) مجموعه اعداد مکعب کامل
(۳) مجموعه اعداد طبیعی
(۴) مجموعه توان‌های حسابی عدد ۳

۷. اگر a^2 مضرب 135 و a^3 مضرب 896 باشد. حداقل مقدار طبیعی a کدام است؟

- (۱) ۱۷۷۱ (۲) ۲۰۶۰ (۳) ۲۵۲۰ (۴) ۲۸۴۰

۸. عضو ابتدای مجموعه $A = \{-93 - 11q \geq 0 \mid q \in \mathbb{Z}\}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۶

۹. در یک تقسیم از اعداد طبیعی مقسوم ۱۲ برابر باقی‌مانده است و باقی‌مانده بیشترین مقدار خود را دارد. مقسوم و باقی‌مانده به ترتیب کدام‌اند؟

- (۱) ۱۲ و ۱۲ (۲) ۱۰ و ۱۲ (۳) ۸ و ۹۶ (۴) ۱۱ و ۱۳۲

۱۰. عدد $ab(a-b)$ در صورتی که a و b اعدادی صحیح باشند، بر کدام یک از عددهای زیر همواره بخش‌پذیر است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۴ (۴) ۲

۱۱. اگر n یک عدد طبیعی و فرد باشد، در این صورت $11 + 7n^2 + n^4$ به کدام صورت نوشته می‌شود؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $12k$ (۲) $10k$ (۳) $16k$ (۴) $32k$

۱۲. چند عدد طبیعی مانند a وجود دارد که $a|18$ ، $a|12$ ، $a|10$ ، $\frac{36}{a}|10$ ؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۰

۱۳. نمایش در مبنای ۲ عددی به صورت 1011110110011 می‌باشد نمایش این عدد در مبنای ۱۶ کدام است؟

- (۱) $2fb3$ (۲) $faeb$ (۳) $a3f4b$ (۴) $ecf3$

۱۴. اگر در گراف ساده از مرتبه ۷ اندازه برابر ۱۷ باشد این گراف حداکثر چند رأس از درجه ۶ دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۰

۱۵. در گراف کامل مرتبه ۷ با مجموعه رئوس $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ چند مسیر به طول ۴ وجود دارد که از رأس d بگذرد و به رأس f ختم شود؟

- (۱) ۹۰ (۲) ۶۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۲۴۰

۱۶. با مجموعه رئوس $\{a, b, c, d, e\}$ چه تعداد گراف وجود دارد که رئوس e و d مجاور باشند و اندازه آن ۶ باشد؟

- (۱) ۲۱۰ (۲) ۸۴ (۳) ۱۲۶ (۴) ۳۲

۱۷. در یک گراف همبند از مرتبه ۸، مسیری به طول بیش از ۲ وجود ندارد. تعداد رأس‌های درجه یک در این گراف کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۸. چند گراف ۲-منتظم ناهمبند وجود دارد که مجموعه رئوس آن $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ باشد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۷

۱۹. گراف G از مرتبه ۱۸ ناهمبند است. بیش‌ترین اندازه ی این گراف چقدر است؟

- (۱) ۱۳۶ (۲) ۱۳۸ (۳) ۱۴۰ (۴) ۱۴۲

۲۰. در گرافی با درجه رأس‌های ۱، ۲، ۲، ۳، ۴ چند دور با طول ۴ وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

دانشگاه سراسری مشهد

۱. گزیده ۱

$$135|a^4 \Rightarrow 5 \times 3^3 | a^4 \Rightarrow a^4 = \underbrace{5 \times 3^3}_q \times k^4 = 5^2 \times 3^4 \times k^4 \Rightarrow a = 5 \times 3^2 \times k \quad (1)$$

جزء
مربع باشد

$$14^3 | a^3 \Rightarrow 2^3 \times 7^3 | a^3 \Rightarrow a^3 = 2^3 \times 7^3 \times q^3 \Rightarrow a = 2 \times 7 \times q \quad (2)$$

ریشه سوم
باید مکعب باشد

$$(1), (2) \Rightarrow \min(a) = [5 \times 3^3, 2^3 \times 7^3] = 5 \times 3^3 \times 2^3 \times 7^3 = 2520^3$$

توجه کنید که در عدد مربع کامل تمامی توانها در تجزیه به عوامل اول باید زوج باشند و در عدد مکعب کامل تمامی توانها در تجزیه به عوامل اول باید مضرب ۳ باشند.

$$a = -9^3 \quad b = 11 \Rightarrow x = \left[\frac{a}{b} \right] = \left[-\frac{9^3}{11} \right] = -9$$

$$A_{min} = -9^3 - 11 \times (-9) = 6$$

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b-1$$

$$a = bq + r, \quad \begin{cases} a = 12^2 \\ r = b-1 \end{cases} \Rightarrow 12^2(b-1) = bq + b - 1 \Rightarrow b(11-q) = 11 \times 11$$

$$\begin{cases} b = 11 \Rightarrow r = 0 \\ 11 - q = 11 \Rightarrow q = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0$$

$$\begin{cases} b = 11 \\ 11 - q = 1 \Rightarrow q = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12^2 \times 10 = 1440 \\ r = b-1 = 10 \end{cases}$$

۱۰. گزیده ۴ چون در گزیده ها تعداد عوامل ۲ مورد اشاره قرار گرفته و وضعیت عوامل ۲ را در اعداد ۵ و ۷ بررسی می کنیم.

$$\begin{aligned} \text{hd}(a-b) &= 7k \times 2^l \times 7^l = 8kq \\ \text{hd}(a-b) &= (2^l k + 1)(7^l + 1) = 2^l q \\ \text{hd}(a-b) &= (2^l k + 1) \times (7^l + 1) = 7q \end{aligned}$$

پس عدد داده شده تحت هر شرایطی بر ۲ بخش پذیر است.

$$\begin{cases} n^F = 14q + 1 \\ n^F = 8q^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow n^F + 3n^F + 11 = 14q + 1 + 3q^2 + 11 = 14q + 3q^2 + 15 = 14k$$

۱. گزیده ۱

$$\begin{cases} a|a \Rightarrow \begin{cases} 14^3 | a \\ 14^2 | a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14^3 | a \\ 14^2 | a \end{cases} \\ a \text{ قطباً عمل ۲ در ۲} \\ a \text{ قطباً عمل ۷ ندارد} \Rightarrow a = 7k + 7 \\ (a, 112) = (a, 2^3 \times 7) = 2^3 \times 7 = 8 \end{cases}$$

۲. گزیده ۱ فرض می کنیم عدد داده شده در سنیای ۱۰ است. این عدد را به سنیای ۵ می برسم.

$$(20)z = x + 2x^2 = x(2x+1) = q^2$$

$$\begin{aligned} 1) & 4 \times 9 = 3^2 & 2) & 15 \times 11 \neq q^2 \\ 3) & 5 \times 13 \neq q^2 & 4) & 7 \times 15 \neq q^2 \end{aligned}$$

۳. گزیده ۳

$$\begin{cases} a^2 | d \\ a^2 | d^2 = 1012 \\ a^2 | d = 752 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 | d \\ a^2 | d = 1012 \\ a^2 | d = 752 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 | d \\ a^2 | d = 1012 \\ a^2 | d = 752 \end{cases}$$

$$10 \times 750^2 = 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 = 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17$$

$$5^3 \times 15^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 = 2^2 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17$$

پس ۲۳ رقمی است.
۵ گزیده ۳ تجزیه.

$$\|a\|_n = \begin{cases} a^2 | n \\ a^2 + 1 | n \end{cases}$$

$$2^2 | a \Rightarrow a = 2^2 \times \dots$$

$$2^2 | a^2 + 1 \Rightarrow a^2 \equiv -1 \pmod{4} \Rightarrow a \equiv 1 \pmod{4} \quad (1)$$

$$(a, 7) = \begin{cases} (2^2 \times \dots, 7) = 1 \\ (2^2 \times \dots, 7) = 7 \end{cases} \Rightarrow (a, 7) = 1 \quad \text{یا} \quad 7$$


۴. گزیده ۴

$$\begin{aligned} k \in S &\Rightarrow 7k \in S \\ 1 &\Rightarrow 7 \\ 2 &\Rightarrow 14 \\ 3 &\Rightarrow 21 \\ 4 &\Rightarrow 28 \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

۷. گزیده ۷

$$135 = 5 \times 3^3, \quad 84 = 2^3 \times 3 \times 7$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \underbrace{\frac{21}{2} \times \frac{21}{2}}_{=10} = 10$$

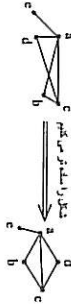
گراف مستطی به شکل  است.

جایگشت های دایره ای هر بخش مرحله دسته بندی

۹. اگر به ۱ برای این که بیش ترین تعداد یال را داشته باشیم یک رأس را کنار می گذاریم و با بقیه رؤوس گراف کامل ساخته و چون یک رأس ایزوله داریم گراف همچنان ناهمبند خواهد ماند.

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{17 \times 16}{2} = 17 \times 8 = 136$$

۲۰. اگر به ۱ گراف کامل نیست پس باید آن را رسم کنیم.



فقط یک دور abcdef با طول ۴ موجود است.

۱۲. اگر به ۴
تک: $a|b, c$
 $a|c$

$$\begin{cases} a|12 \\ a|18 \end{cases} \Rightarrow a|(12, 18) \Rightarrow a|6 \Rightarrow a = 1, 2, 3, 6$$

$$\begin{aligned} a=1 &\Rightarrow 3|a \quad | \quad a \times \\ a=2 &\Rightarrow 18|a \quad | \quad a \times \\ a=3 &\Rightarrow 12|a \quad | \quad a \times \\ a=6 &\Rightarrow 6|a \quad | \quad a \times \end{aligned}$$

اینها را در شرط آخر بررسی می کنیم.

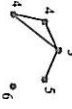
فقط مقدار طبیعی برای ۵ وجود ندارد.

۱۳. اگر به ۱۳ چون $13 = 16$ می باشد کافی است چهار رقم راست را چهار رقم چپ کرده و هر چهار رقم را به بیانی ۱۰ ببریم. دقت: اگر مینا بزرگتر از ما بود به صورت قرمز دانی $a=10, b=12, c=13, d=14, e=15, f=16$ است.

$$\begin{aligned} (1011)2 &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16 \\ (1011)2 &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16 \\ (1111)2 &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16 \\ (10)2 &= 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \end{aligned}$$

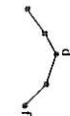
عدد مورد نظر به صورت $(1011)2$ در آید.

گراف می رسم.



چون گفته شده حداکثر چند رأس از درجه ۴ دارد باید سعی کنیم ۴ یال را از رؤوس کمتری حذف کنیم پس حداقل ۴ رأس لازم است و ۳ رأس هم چنان از درجه ۴ باقی می ماند.

۱۵. اگر به ۴ در مسیر بیرون ۴ نیاز به ۵ رأس داریم که باید ۴ رأس پایان باشد و ۱ باید یکی از رؤوس مسیر باشد. پس نیاز به ۳ رأس دیگر داریم که این کار به $\binom{5}{3}$ حالت قابل انجام است این ۳ رأس با ۱ تشکیل ۴ رأس می دهند که ۴ جایگشت دارند.



پس: $\binom{5}{3} \times 4! = 240$ جواب

۱۱. اگر به ۳ با پنج رأس حداکثر ۱۰ یال می توان داشت.

یال ها قطعاً باید انتخاب شود. پس کافی است از بین ۹ یال باقی مانده ۵ یال انتخاب کنیم.

$$\binom{9}{5} = 126$$



۱۷. اگر به ۳ وقتی در یک گراف مسیری به طول بیش از ۲ وجود نداشته باشد همی رؤوس به یک رأس وصل می باشند مانند درخت رو بنود.

این درخت ۱ رأس از درجه ۳ و ۷ یال و ۸ یال از درجه ۱ دارد.

۱۸. اگر به ۱ گراف ۳ - مستطی ناهمبند از درجه ۴ قطعاً دو بخشی است ولی اینجا چون رأس ها نامگذاری شده اند اولاً باید با دسته بندی برای هر بخش رأس های متناوبی از آن انتخاب کنیم پس با آن رأس ها نیز جایگشت های دایره ای متناوبی ایجاد کنیم.